第 38 講　方程式・不等式の解

38　次の各問いに答えよ．ただし，a，b，c は実数とする．

(1)　x の方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解け．

(2)　x の方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもつ条件を求めよ．

(3)　x の不等式 $ax^2+bx+c>0$ を解け．

(4)　x の不等式 $ax^2+bx+c>0$ が実数解をもつ条件を求めよ．

＜ Note ＞

第 38 講　方程式・不等式の解

38　x の不等式 $ax^2-2a^2x+a^3+a^2-b+1\geqq 0$ が実数解をもつような a と b の条件を求めよ．

【選択肢】

㋐　$a>0$ または $b\leqq a^2+1$（$a\leqq 0$）　㋑　$a\geqq 0$ または $b\leqq a^2+1$（$a<0$）

㋒　$a>0$ または $b>a^2+1$（$a\leqq 0$）

＜ Note ＞

第 38 講　方程式・不等式の解

38　次の各問いに答えよ．ただし，a，b，c は実数とする．

(1)　x の方程式 $ax^2+bx+c=0$ を解け．

(2)　x の方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもつ条件を求めよ．

(3)　x の不等式 $ax^2+bx+c>0$ を解け．

(4)　x の不等式 $ax^2+bx+c>0$ が実数解をもつ条件を求めよ．

【答】 (1)
$$\begin{cases} a\neq 0 \text{ のとき} & x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ a=0,\ b\neq 0 \text{ のとき} & x=-\dfrac{c}{b} \\ a=b=c=0 \text{ のとき} & x \text{ は任意} \\ a=b=0,\ c\neq 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \end{cases}$$

(2)「$a\neq 0$ かつ $b^2-4ac\geqq 0$」または「$a=0$ かつ $b\neq 0$」または「$a=b=c=0$」

(3)
$$\begin{cases} a=b=0,\ c\leqq 0 \text{ または } a<0,\ b^2-4ac\leqq 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a=b=0,\ c>0 \text{ または } a>0,\ b^2-4ac<0 \text{ のとき} & x \text{ はすべての実数} \\ a=0,\ b>0 \text{ のとき} & x>-\dfrac{c}{b} \\ a=0,\ b<0 \text{ のとき} & x<-\dfrac{c}{b} \\ a>0,\ b^2-4ac\geqq 0 \text{ のとき} & x<\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x>\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ a<0,\ b^2-4ac>0 \text{ のとき} & \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<x<\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$

(4)「$a=0$ かつ $b\neq 0$」または「$a=b=0$ かつ $c>0$」または「$a>0$」

　　または「$a<0$ かつ $b^2-4ac>0$」

【解答】

(1)　$a\neq 0$ のとき $ax^2+bx+c=0$ に解の公式を用いて $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

　$a=0$ のとき $ax^2+bx+c=0$ は $bx=-c$ となるので

　・$b\neq 0$ のとき，$x=-\dfrac{c}{b}$

　・$b=-c=0$ のとき，x は任意

　・$b=0$ かつ $c\neq 0$ のとき，x は解なし

以上より

$$\begin{cases} \boldsymbol{a\neq 0} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \\ \boldsymbol{a=0,\ b\neq 0} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{x=-\dfrac{c}{b}} \\ \boldsymbol{a=b=c=0} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{x} \textbf{ は任意} \\ \boldsymbol{a=b=0,\ c\neq 0} \textbf{ のとき} & \boldsymbol{x} \textbf{ は解なし} \end{cases}$$

(2)　(1)の結果より，実数解をもつ条件は

「$a\neq 0$ かつ $b^2-4ac\geqq 0$」または「$a=0$ かつ $b\neq 0$」または「$a=b=c=0$」

(3)　(Ⅰ)　$a=0$ のとき

与えられた不等式は $bx+c>0$ となる．

・$b>0$ のとき，$x>-\dfrac{c}{b}$

・$b=0$ のとき，与えられた不等式は $c>0$ となるので，$c>0$ ならば x は任意，
$c\leqq 0$ ならば x は解なし

・$b<0$ のとき，$x<-\dfrac{c}{b}$

以下 $\alpha=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ とする．

(Ⅱ)　$a>0$ のとき

$y=ax^2+bx+c$ のグラフが下に凸となることなどより

・$b^2-4ac<0$ のとき，x はすべての実数

・$b^2-4ac=0$ のとき，$x\neq -\dfrac{b}{2a}$

・$b^2-4ac>0$ のとき，$x<\alpha$，$x>\beta$

(Ⅲ)　$a<0$ のとき

$y=ax^2+bx+c$ のグラフが上に凸となることなどより

・$b^2-4ac\leqq 0$ のとき，x は解なし

・$b^2-4ac>0$ のとき，$\alpha<x<\beta$

以上より

$$\begin{cases} a=b=0,\ c\leqq 0 \text{ または } a<0,\ b^2-4ac\leqq 0 \text{ のとき} & x \text{ は解なし} \\ a=b=0,\ c>0 \text{ または } a>0,\ b^2-4ac<0 \text{ のとき} & x \text{ はすべての実数} \\ a=0,\ b>0 \text{ のとき} & x>-\dfrac{c}{b} \\ a=0,\ b<0 \text{ のとき} & x<-\dfrac{c}{b} \\ a>0,\ b^2-4ac\geqq 0 \text{ のとき} & x<\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x>\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ a<0,\ b^2-4ac>0 \text{ のとき} & \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<x<\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$

(4)　(3)の結果より，実数解をもつ条件は

**「$a=0$ かつ $b\neq 0$」または「$a=b=0$ かつ $c>0$」または「$a>0$」
または「$a<0$ かつ $b^2-4ac>0$」**

第38講　方程式・不等式の解

38　x の不等式 $ax^2-2a^2x+a^3+a^2-b+1\geqq 0$ が実数解をもつような a と b の条件を求めよ.

【選択肢】

㋐　$a>0$ または $b\leqq a^2+1$ $(a\leqq 0)$　　㋑　$a\geqq 0$ または $b\leqq a^2+1$ $(a<0)$

㋒　$a>0$ または $b>a^2+1$ $(a\leqq 0)$

【答】 ㋐

【解答】

(Ⅰ)　$a>0$ のとき

$y=ax^2-2a^2x+a^3+a^2-b+1$ のグラフは下に凸であるので, a と b の値に関わらず $y\geqq 0$ となる x は存在する.

(Ⅱ)　$a=0$ のとき

与えられた不等式は $-b+1\geqq 0$ となるので, $b\leqq 1$ のときに x は実数解をもつ.

(Ⅲ)　$a<0$ のとき

$y=ax^2-2a^2x+a^3+a^2-b+1=a(x-a)^2+a^2-b+1$ のグラフは上に凸であるので, $a^2-b+1\geqq 0$ すなわち $b\leqq a^2+1$ のときに x は実数解をもつ.

以上より, 求める条件は

$$\boldsymbol{a>0 \text{ または } b\leqq a^2+1\ (a\leqq 0)}$$